1 Sistemi di equazioni di grado superiore al primo

1.1 Prerequisiti

I prerequisiti per questa sezione sono la comprensione della risoluzione delle equazioni di secondo grado e della risoluzione dei sistemi di equazioni di primo grado.

1.2 I sistemi di grado superiore al primo

Un sistema di equazioni è l'insieme di più equazioni con le stesse incognite. Inoltre il grado di un sistema di equazioni è dato dal prodotto dei gradi delle singole equazioni che lo compongono! Quinid se un sistema è composto da due equazioni di primo grado, il sistema sarà anch'esso di primo grado; se un sistema è composto da una equazione di secondo grado e una di primo grado, il sistema sarà di secondo grado; se un sistema è composto da due equazioni di secondo grado si avrà un sistema di quarto grado, ecc.

Risolvere i sistemi, come già visto consiste nel trovare tutte le soluzioni comuni alle equazioni del sistema. Ciò significa che per le equazioni di grado superiore al primo ci può essere un numero variabile di soluzioni (ogni soluzione è un "set" di risultati per tutte le incognite) che va da 0 (sistema impossibile) fino al grado del sistema. Per risolvere un sistema di grado superiore al primo **solitamente si usa la tecnica della sostituzione**.

1.3 Tre esempi

1.3.1 Primo esempio

$$\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 + 2x - y = 14 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

Questo è evidentemente un sistema di .... grado.

Che cosa si può dedurre a proposito delle soluzioni?

Per risolverlo conviene isolare una delle incognite nella seconda e sostituire il risultato nella prima equazione.

$$\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 + 2x - y = 14 \\ y = 4 - 2x \end{cases}$$

Sostituendo la seconda equazione nella prima si ottiene:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3(4-2x)^2 + 2x - (4-2x) &= 14 \\ 2x^2 - 3(16 - 16x + 4x^2) + 2x - 4 + 2x &= 14 \\ 2x^2 - 48 + 48x - 12x^2 + 2x - 4 + 2x &= 14 \\ -10x^2 + 52x - 66 &= 0 \\ 5x^2 - 26x + 33 &= 0 \end{aligned}$$

Usando la formula risolutiva si ottengono due soluzioni:

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 165}}{5} \qquad \text{e quindi} \qquad x_1 = 3 \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{11}{5}$$

Naturalmente si devono trovare anche le soluzioni per y sostituendo i valori di x nell'equazione (più comoda!).

$$y_1 = 4 - 2 \cdot 3 = -2 \qquad \text{e} \qquad y_2 = 4 - 2 \cdot \frac{11}{5} = -\frac{2}{5}$$

E come risultato si potrà scrivere: $S = \{(3; -2), (\frac{11}{5}; -\frac{2}{5})\}$

1.3.2 Secondo esempio

$$\begin{cases} xy - x + y = 2 \\ 4y + x = 7 \end{cases}$$

Siccome il discriminante nell'equazione ottenuta è $\Delta = 0$ si ha unicamente una soluzione: $S = \{(1; \frac{3}{2})\}$.

1.3.3 Terzo esempio

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 9 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

Siccome il discriminante in questo caso è $\Delta < 0$ il sistema non ha soluzioni.

1.4 Esercizi (quelli in grigio per chi si sente "in gamba")

$\begin{cases} x(x+2y) = 0 \\ 4x - y = 18 \end{cases}$	$S = \begin{cases} x = 0 \\ y = -18 \end{cases} e \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$	$\begin{cases} x^2 - xy = y^2 + 11 \\ 2x + 4 + y = 0 \end{cases}$	$S = \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases} e \begin{cases} x = -9 \\ y = 14 \end{cases}$
$\begin{cases} 3x = y + 2 \\ x^2 - xy + y^2 = 36 + xy \end{cases}$	$S = \begin{cases} x = -2 \\ y = -8 \end{cases} e \begin{cases} x = 4 \\ x = 10 \end{cases}$	$\begin{cases} x - y = 1 \\ (x+y)^2 + y(1-2x) = 18 - x \end{cases}$	$S = \{(3; 2), (-3; -4)\}$
$\begin{cases} x\sqrt{3} - y + 13 = 0 \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 845 \end{cases}$	$S = \begin{cases} x = 13\sqrt{3} \\ y = 52 \end{cases} e \begin{cases} x = -19\sqrt{3} \\ y = -44 \end{cases}$	$\begin{cases} (x-3)^2 = 3x(y-2) \\ x(2y-3) = 3 \end{cases}$	$S = \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} e \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}$
$\begin{cases} x + y = 8 \\ x^2 - (y^2 + 16) = 16 \end{cases}$	$S = \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x = \frac{1}{2}(1-y) \\ (4x+y)^2 + 4x + y + 1 = 0 \end{cases}$	$S = \varnothing$
$\begin{cases} 2x + y + 7 = 0 \\ 4x^2 = (y+7)^2 \end{cases}$	$S = \text{indet.}$	$\begin{cases} x + 2b = 2y \\ x^2 - xy + y^2 = 3a^2 + b^2 \end{cases}$	$S = \begin{cases} x = 2a \\ y = b + a \end{cases} e \begin{cases} x = -2a \\ y = b - a \end{cases}$
$\begin{cases} 2 + \frac{3}{4}x = \frac{4y+9}{4} \\ \frac{x-3}{x-2} = 1 - \frac{2y-3}{y-1} \end{cases}$	$S = \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} e \begin{cases} x = \frac{11}{6} \\ y = \frac{9}{8} \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{1}{x-a} + \frac{1}{y-b} = \frac{1}{2b} \\ 2x + y = 2a + b \end{cases}$	$S = \begin{cases} x = a + b \\ y = -b \end{cases}$
$\begin{cases} 2x = 20 + y \\ x + z = 10 \\ 2x^2 - z^2 = 50 - \frac{y^2}{4} \end{cases}$	$S = \begin{cases} x = 5 \\ y = -10 \\ z = 5 \end{cases} e \begin{cases} x = -5 \\ y = -30 \\ z = 15 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2(y+z) - 1 = 3y \\ x + y - z = 2y - x \\ (x-y)(x+y) + 4 + z^2 = 0 \end{cases}$	$S = \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} e \begin{cases} x = -\frac{6}{5} \\ y = -\frac{7}{3} \\ z = -\frac{1}{15} \end{cases}$