

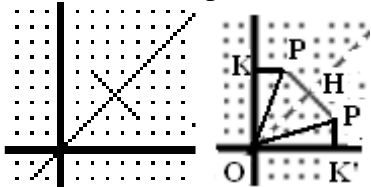
Funzioni inverse

Simmetrie rispetto alla bisettrice dei quadranti dispari.

Consideriamo la trasformazione descritta dalle equazioni :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

Consideriamo il punto P(2,5) se eseguiamo tra trasformazione otteniamo il punto P'(5,2)



i due punti risultano simmetrici rispetto alla bisettrice dei quadranti dispari.

In generale presi due punti **P (a , b)** e **P' (b , a)** se tracciamo la retta $y=x$ (bisettrice dei quadranti dispari) osserviamo che

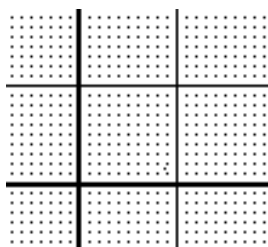
i due punti sono simmetrici rispetto alla bisettrice

Occorre dimostrare che la retta passante per P e P' risulta essere perpendicolare alla retta $y=x$ ed infine che i due punti sono equidistanti dalla retta.

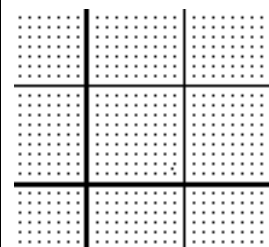
Oppure possiamo osservare che i triangoli rettangoli (POK) e (P'OK') sono uguali in quanto i cateti sono uguali

Data una funzione f se eseguendo la trasformazione $(x \rightarrow y)$ si ottiene un'altra funzione questa prende il nome di funzione inversa.

Esempio: data l'equazione della retta $y=2x$ dopo aver invertito x con y otteniamo l'equazione di un'altra retta $x=2y$ quindi la funzione di partenza è **invertibile**, $y=1/2x$ è la funzione inversa



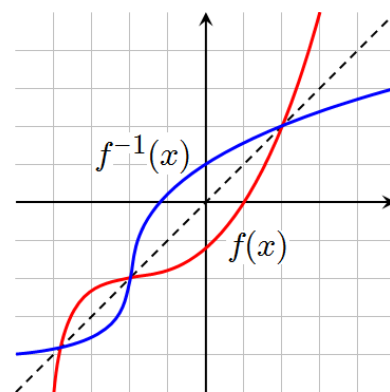
Esempio: data l'equazione della parabola $y=x^2$ dopo aver eseguito la trasformazione $(x \rightarrow y)$ otteniamo: $x=y^2$ l'equazione che abbiamo ottenuto non è l'equazione di una funzione quindi la funzione di partenza **non è invertibile**.



Trigonometria (Mustafa) pag. 51- fotocopie prima liceo

Se la curva trovata ribaltando il grafico della funzione f rispetto alla retta $y=x$ è il **diagramma di una funzione g** , si dice che la funzione f è **invertibile** e che g è l'**inversa** di f .

L'inversa g di una funzione invertibile viene spesso indicata con f^{-1} ; dunque $f^{-1}(b) = a$ se e solo se $b = f(a)$ indicando le variabili, come al solito, con le lettere x e y si può riscrivere:
 $f^{-1}(x) = y$ se e solo se $x = f(y)$.



Non tutte le funzioni sono invertibili.

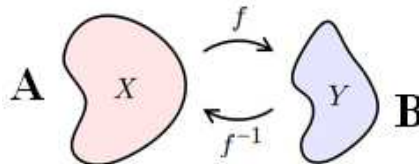
Criterio della retta orizzontale:

una funzione f è invertibile se e solo se non esiste alcuna retta orizzontale che intersechi il grafico più di una volta.

Elementi di matematica Le funzioni e i limiti volume U – Bergamini- fotocopie

Funzione inversa

Data la funzione biettiva f da A a B , la funzione inversa di f è la funzione biettiva f^{-1} da B ad A che associa a ogni y di B il valore x di A tale che $y = f(x)$.



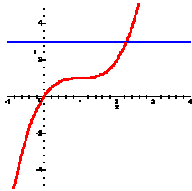
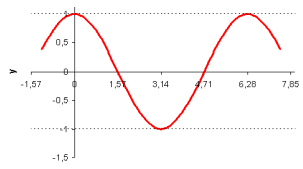
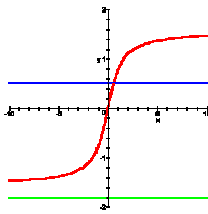
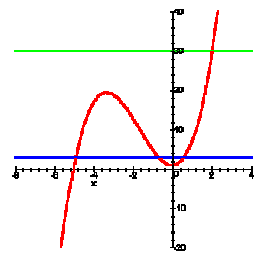
Una funzione da A a B si dice biettiva (o biunivoca) se è sia iniettiva sia suriettiva.

Una funzione da A a B si dice iniettiva se ogni elemento di B è immagine di al più un elemento di A

Una funzione da A a B si dice suriettiva se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A

Nota bene che l'insieme delle immagini o insieme **immagine** di f non coincide con il **codominio**. C'è da dire che in alcuni testi si trova il termine **codominio** usato per indicare l'insieme immagine e al posto di **codominio** si usa il termine **insieme di arrivo** di f .

Vedi fotocopie.

Funzione reale di variabile reale			
iniettiva  suriettiva	non iniettiva  Non suriettiva	iniettiva  non suriettiva	non iniettiva  suriettiva

✳ Metodo retta orizzontale

Per le funzioni reali di variabile reale si ha una semplice interpretazione grafica del concetto di funzione iniettiva: **una funzione è iniettiva** se e solo se il suo grafico gode della proprietà che una **retta orizzontale** condotta da un qualunque punto del codominio (attenzione: del codominio, non dell'immagine!) **interseca il grafico della funzione in un punto al più.**

Iniettività significa che per ogni x, y del dominio vale $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ in altre parole a valori distinti del dominio corrispondono valori distinti nel codominio

Per le funzioni reali di variabile reale si ha una semplice interpretazione grafica del concetto di funzione suriettiva: **una funzione è suriettiva** se e solo se il suo grafico gode della proprietà che una **retta orizzontale** condotta da un qualunque punto del codominio (attenzione: del codominio, non dell'immagine!) **interseca il grafico della funzione in almeno un punto.**

Suriettività significa che per ogni elemento y del codominio esiste (almeno) un elemento x del dominio tale che $y = f(x)$ (cioè ogni elemento del codominio è immagine di almeno un elemento del dominio, quindi ad ogni valore di y corrisponde almeno un valore del dominio.)

Funzione inversa parziale

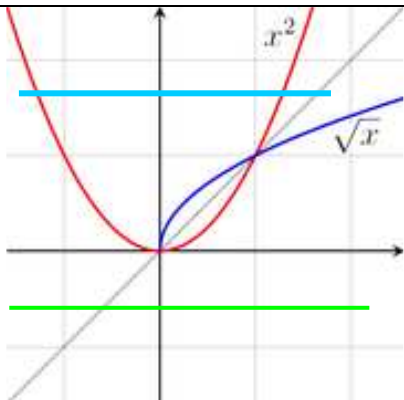
Molte funzioni, anche significative, non siano invertibili. A seconda della condizione che manca, cioè l'iniettività o la suriettività, si procede **costruendo una nuova funzione** che sia invertibile.

Se una funzione non è iniettiva si può restringere il dominio fino a considerare un sottodominio in cui essa è iniettiva e invertire questa restrizione: così ci si comporta ad esempio per le funzioni trigonometriche, che, essendo periodiche, non sono iniettive.

In questi casi si pone il problema di quale sottodominio utilizzare, quale sia il più significativo per un utilizzo successivo: ad esempio, nell'invertire il seno si pone per convenzione che il sottodominio di inversione sia $[-\pi/2, \pi/2]$, in cui il seno cresce (e dunque iniettivo) da -1 a 1. Avremmo ugualmente potuto invertire il seno negli intervalli $[\pi/2, 3\pi/2]$, $[2\pi, 2\pi + \pi/2]$, eccetera

Se una funzione non è suriettiva ma è iniettiva, si riduce il codominio della funzione esattamente alla sua immagine.

Procedendo in questo modo otteniamo una nuova funzione suriettiva, dunque invertibile.



Esempio: la parabola

La parabola è una funzione non suriettiva e non iniettiva. È non suriettiva in quanto ad y non corrisponde nessun valore del dominio per $y < 0$ (vedi retta orizzontale verde). Se restringiamo il codominio per valori di $y \geq 0$ la funzione risulta suriettiva, ma non è ancora invertibile perché non è iniettiva (vedi retta orizzontale celeste). Occorre restringere il dominio e considerare i valori di $x \geq 0$, in questo modo la funzione risulta iniettiva, quindi invertibile.

La funzione inversa è $x=y^2$ o meglio $y=\sqrt{x}$ con x e y non negativi.

Funzione esponenziale $y=a^x$ base $a>1$		Dal grafico possiamo stabilire che la funzione è invertibile (metodo della retta orizzontale), quindi possiamo costruire la funzione inversa eseguendo la trasformazione $x \rightarrow y$ (invertiamo x con y)					
Studiamo il grafico della funzione esponenziale con $a=2$ $y=2^x$		otteniamo: $x=2^y$					
Attribuiamo, come sempre, dei valori alla variabile x e determiniamo i valori di y , costruiamo la tabella per ottenere il grafico:		Osserviamo che per ottenere la tabella occorre semplicemente inv...					
x	y	Dal grafico possiamo osservare che si tratta effettivamente di una funzione Dominio $x \in \mathbb{R}$ Codominio $y \in \mathbb{R}^+$ Asintoti : l'asse delle ascisse risulta essere un asintoto della curva			Calcolare il dominio, il condominio e l'asintoto della funzione inversa confrontando i grafici Dominio Codominio Asintoti :	x	y
0	1					1	0
1	2					2	1
2	4					4	2
3	8					8	3
4	16					16	4
-1	1/2					1/2	-1
-2	1/4	1/4	-2				
-3	1/8	1/8	-3				
-4	1/16	1/16	-4				
Data la funzione esponenziale $y=2^x$ la funzione inversa $x=2^y$ è la funzione logaritmica $y=\log_2(x)$. Avendo costruito la funzione inversa osserviamo che le due funzioni sono simmetriche rispetto alla bisettrice dei quadranti dispari.							
In generale data la funzione esponenziale $y=a^x$ se si esegue la trasformazione $x \rightarrow y$ la funzione che si ottiene è la funzione logaritmica				Funzione logaritmica $y=\log_a(x)$			
<input type="checkbox"/> ripetere							
Funzione esponenziale $y=a^x$ base $0<a<1$		Dal grafico possiamo stabilire che la funzione è invertibile (metodo della retta orizzontale), quindi possiamo costruire la funzione inversa eseguendo la trasformazione $x \rightarrow y$ (invertiamo x con y)					
Studiamo il grafico della funzione esponenziale con $a=1/2$ $y=(1/2)^x$		otteniamo: $x=(1/2)^y$					
Costruiamo la tabella per ottenere il grafico, attribuiamo, come sempre, dei valori alla variabile x e determiniamo i valori di y .		Osserviamo che per ottenere la tabella occorre semplicemente inv...					
x	y	Dal grafico possiamo osservare che Dominio $x \in \mathbb{R}$ Codominio $y \in \mathbb{R}^+$ Asintoti : l'asse delle ascisse risulta essere un asintoto della curva			Calcolate il dominio, il condominio e l'asintoto della funzione inversa confrontando i grafici Dominio Codominio Asintoti :	x	y
0						1	
1						2	
2						4	
3						8	
4						16	
-1						1/2	
-2						1/4	
-3						1/8	
-4						1/16	
Data la funzione esponenziale $y=(1/2)^x$ la funzione inversa $x=(1/2)^y$ è la funzione logaritmica $y=\log_{1/2}(x)$							

Esponenziali

Potenze con esponente reale

La potenza a^x è definita:

- se $a > 0$, per ogni $x \in \mathbf{R}$;
- se $a = 0$, per tutti e soli gli $x \in \mathbf{R}^+$;
- se $a < 0$, per tutti e soli gli $x \in \mathbf{Z}$.

Sono definite:

$$(-\sqrt{3})^2 = (-\sqrt{3}) \cdot (-\sqrt{3});$$

$$7^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^2};$$

$$3^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{3^{\sqrt{2}}}.$$

Casi particolari :

- $a = 1$, $1^x = 1$, per ogni $x \in \mathbf{R}$;
- $x = 0$, $a^0 = 1$, per ogni $a \in \mathbf{R}^+$;

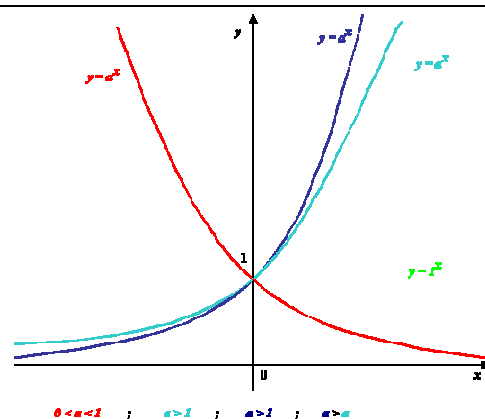
Non sono definite:

$$(-2^{\sqrt{3}}); 0^0; 0^{-3}.$$

Le proprietà delle potenze definite per esponenti interi valgono anche per esponenti reali:

Se $a > 0$, per ogni x, y appartenenti a \mathbf{R} vale :

1. $(a^x)^y = a^{xy}$;
2. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
3. $a^x : a^y = a^{x-y}$;
4. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$;
5. $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$



Funzione esponenziale

Si chiama *funzione esponenziale* ogni funzione del tipo :

$$y = a^x, \text{ con } a > 0 \text{ fissato, } x \in \mathbf{R}$$

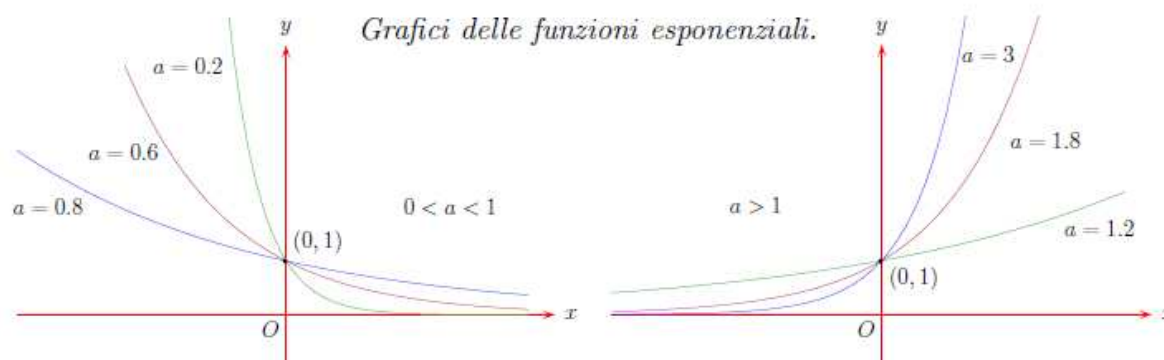
Il *dominio* della funzione, cioè l'insieme dei valori che si possono attribuire a x è tutto \mathbf{R} ;

il *codominio*, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume è \mathbf{R}^+ (la funzione esponenziale è sempre strettamente positiva).

Si distinguono tre casi:

- $a > 1$: funzione crescente : $x > y \Rightarrow a^x > a^y$;
- $a = 1$: funzione costante : $a^x = 1$ per ogni $x \in \mathbf{R}$;
- $0 < a < 1$: funzione decrescente : $x > y \Rightarrow a^x < a^y$.

I seguenti grafici illustrano il comportamento della funzione esponenziale nei vari casi :



Logaritmo

Sia a un numero reale positivo diverso da 1 e x un numero reale positivo.

La funzione **logaritmo in base a** è la funzione inversa rispetto alla funzione esponenziale in base a .

Si dice, cioè, **logaritmo** in base a di un numero x l'esponente da dare ad a per ottenere x (x viene chiamato *argomento* del logaritmo).

In altre parole, se $x = a^y$ segue che: $y = \log_a x$

si legge: y è il logaritmo in base a di x , esempio, $\log_3 81$ è uguale a 4 perché $3^4 = 81$.

Valgono le relazioni:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y),$$

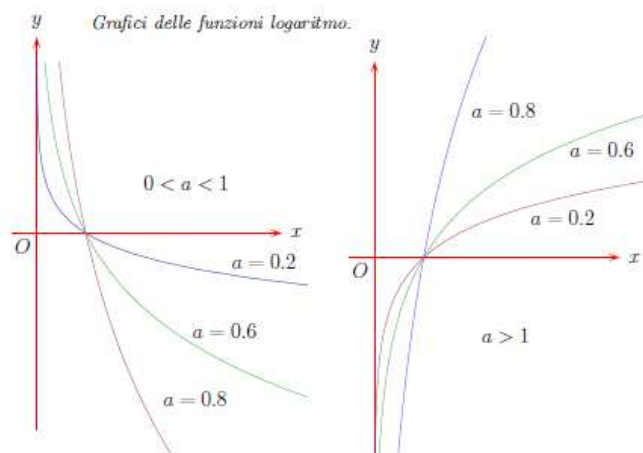
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y),$$

Il logaritmo è utile soprattutto perché trasforma prodotti in somme e i rapporti in differenze,

$$\log_a(x^k) = k \log_a(x).$$

$$\log_a \sqrt[k]{x} = \frac{1}{k} \log_a(x).$$

trasforma elevamenti a potenza in moltiplicazioni e radicali in divisioni.

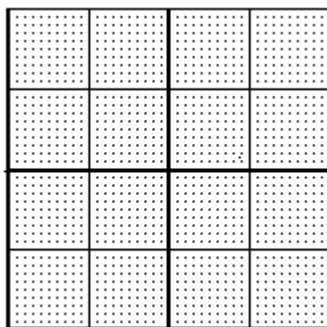


La calcolatrice permette di calcolare il logaritmo in base dieci o in base e di qualsiasi numero. Per poter calcolare il logaritmo in base diversa da dieci, è sufficiente utilizzare la seguente formula che cambia la base del logaritmo:

$$\log_b x = \frac{\log_k x}{\log_k b}$$

Esercitazione

- Traccia il grafico, calcola il dominio, codominio, asintoto, intersezioni, segno della funzione :
 $y = \log_3(x + 6)$



- Calcola il dominio delle seguenti funzioni :
 $y = \log_2\left(\frac{2}{2x - 6}\right)$
 $y = \log_2(-16x + 8)$
 $y = \log_2(4x^2 + 3)$

- Calcola esattamente i seguenti logaritmi (nei casi in cui non è possibile approssima alla quinta cifra decimale)

$$\log_2(32) =$$

$$\log_6 3 =$$

$$\log_3 \frac{1}{27} =$$

$$\log_8 4 =$$

$$\log_3 9\sqrt{81} =$$

- Risolvi le seguenti equazioni

$$\log(3x + 5) = \log(6x - 9)$$

$$\log x + \log 7x = \log(x - 4) + \log(x + 1)$$

$$\log(x - 4) = -2$$

$$3^{x+6} = 3^{3x+7}$$

$$5^x = 7^{5x-4}$$

$$3^{3x} = 9^{x+1}$$