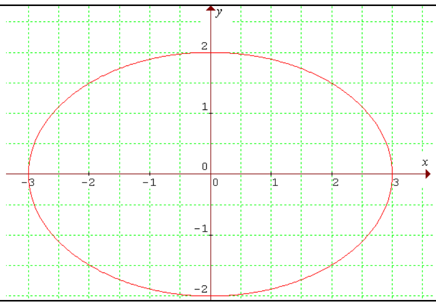
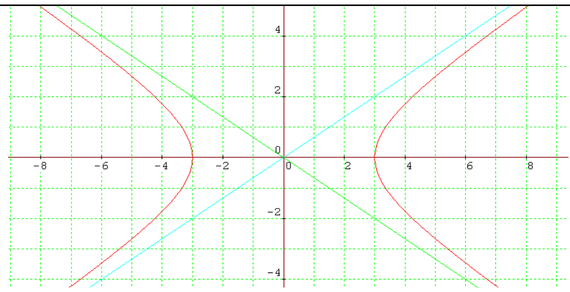
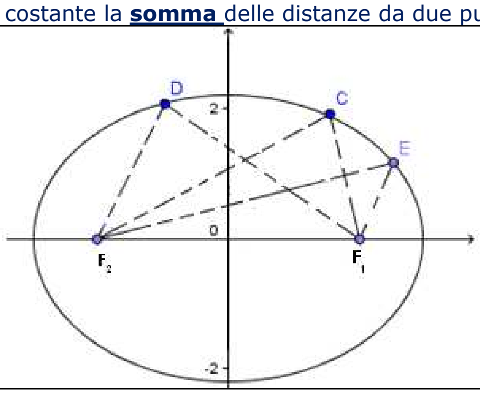
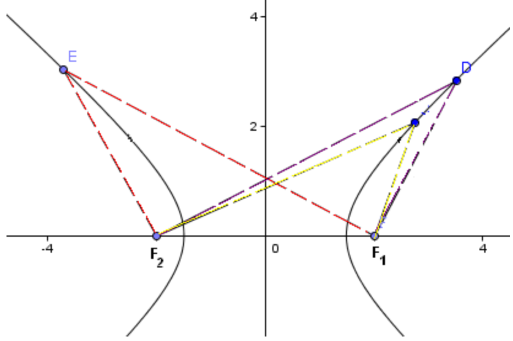
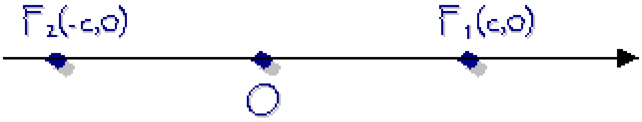
Ellisse	Iperbole
equazione	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
grafico	
	
definizione	
L'ellisse è il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la **somma** delle distanze da due punti fissi detti fuochi.	L'iperbole è il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la **differenza** delle distanze da due punti fissi detti fuochi.
	

Consideriamo i fuochi $F_1(c,0)$ ed $F_2(-c,0)$ della curva sull'asse dalle ascisse simmetrici rispetto all'origine:



Preso un punto P(x, y) vogliamo trovare la relazione che esiste tra l'ascissa e l'ordinata del punto P quando il punto appartiene alla curva, troveremmo che tutti i punti verificano un'equazione di secondo grado. Per determinare l'equazione dobbiamo utilizzare la formula della distanza: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$PF_1+PF_2=cost$	$PF_1-PF_2=cost$
$PF_1=\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}$	$PF_2=\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}$
posta la costante uguale a **2a** otteniamo:	
$PF_1+PF_2=2a$ $\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a$	$PF_1-PF_2=2a$ $\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a$

Dobbiamo risolvere un'equazione irrazionale. Trasportiamo una delle due radici al secondo membro ed eleviamo al quadrato il primo ed il secondo membro:

Ellisse:

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = -\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+2a$$
$$x^2-2cx+c^2+y^2 = x^2+2cx+c^2+y^2-4a\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}+4a^2$$
$$-2cx-2cx-4a^2 = -4a\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}$$
$$+2cx+2cx+4a^2 = +4a\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}$$
$$4cx+4a^2 = +4a\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}$$
$$cx+a^2 = a\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}$$

Iperbole:

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = +\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+2a$$
$$x^2-2cx+c^2+y^2 = x^2+2cx+c^2+y^2+4a\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}+4a^2$$
$$-2cx-2cx-4a^2 = +4a\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}$$
$$+2cx+2cx+4a^2 = -4a\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}$$
$$4cx+4a^2 = -4a\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}$$
$$cx+a^2 = -a\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}$$

Dopo aver ridotto l'espressione e diviso per 4 otteniamo ancora un'equazione irrazionale, eleviamo un'altra volta al quadrato il primo e il secondo membro:

Si osservi che le due espressioni risultano uguali dopo aver elevato al quadrato per la seconda volta:

$PF_1+PF_2=2a$

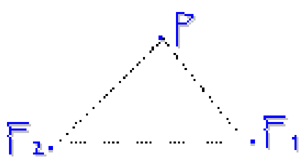
$$cx+a^2 = a\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}$$
$$c^2x^2+2a^2cx+a^4 = a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)$$
$$c^2x^2+2a^2cx+a^4 = a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$
$$+c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2 = -a^4+a^2c^2$$

$PF_1-PF_2=2a$

$$-c^2x^2+a^2x^2+a^2y^2 = +a^4-a^2c^2$$
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = +a^2(a^2-c^2)$$

$$+c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2 = -a^4+a^2c^2$$
$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2 = +a^2(c^2-a^2)$$

Dato un triangolo sappiamo che la somma di due lati deve essere sempre maggiore del terzo lato



Si osservi nel disegno che $F_1F_2=2c$

Dato un triangolo sappiamo che la differenza di due lati deve essere sempre minore del terzo lato

$PF_1+PF_2>F_1F_2$

$2a>2c \qquad a>c \qquad a^2>c^2$

poniamo $a^2-c^2=b^2$

$PF_1-PF_2<F_1F_2$

$2a<2c \qquad a<c \qquad a^2>c^2$

poniamo $c^2-a^2=b^2$

Dividiamo per a^2b^2:

$$b^2x^2+a^2y^2 = +a^2b^2$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$b^2x^2-a^2y^2 = +a^2b^2$$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Ellisse — Iperbole

Equazione

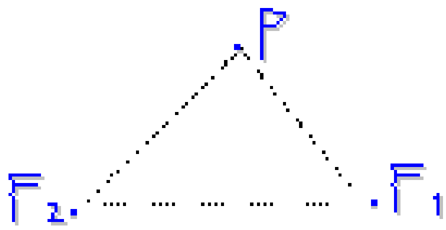
Ellisse	Iperbole
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$PF_1+PF_2=2a$

Si osservi nel disegno che $F_1F_2=2c$

$PF_1-PF_2=2a$

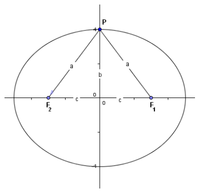
Dato un triangolo sappiamo che la somma di due lati deve essere sempre maggiore del terzo lato



Dato un triangolo sappiamo che la differenza di due lati deve essere sempre minore del terzo lato

Ellisse	Iperbole
$PF_1+PF_2>F_1F_2$ $2a>2c$ $a>c$ $a^2>c^2$ poniamo $a^2-c^2=b^2$	$PF_1-PF_2<F_1F_2$ $2a<2c$ $a<c$ $a^2>c^2$ poniamo $c^2-a^2=b^2$

La relazione $a^2-c^2=b^2$ relativa all'ellisse possiamo ricavarla utilizzando il teorema di Pitagora.



Consideriamo il punto d'intersezione dell'ellisse con il semiasse positivo delle ordinate P(0,b), il triangolo (PF_1F_2) è isoscele in quanto F_1 ed F_2 sono simmetrici rispetto all'origine per costruzione. I lati obliqui, PF_1 e PF_2 sono uguali ad ***a*** in quanto per l'ellisse $PF_1+PF_2=2a$. Il triangolo (POF_1) è retto in O quindi possiamo applicare il teorema di Pitagora.

$$a^2=c^2+b^2$$

Ellisse $a^2-c^2=b^2$	$c^2-a^2=b^2$ Iperbole

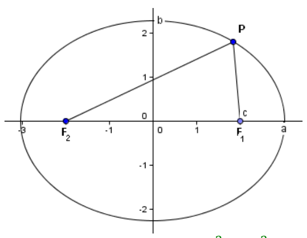
grafico

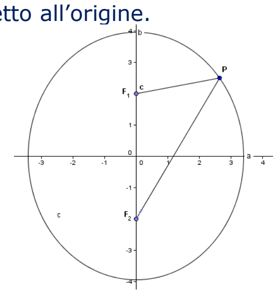
Le curve sono simmetriche rispetto agli assi cartesiani

Se a>b

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

I punti d'intersezione con l'asse delle ascisse sono (-a;0) e (a;0) dove **a è la lunghezza del semiasse maggiore.** I punti d'intersezione con l'asse delle ordinate (0;-b) e (0;b) dove b è la lunghezza del semiasse minore. I fuochi si trovano sull'asse delle ascisse simmetrici rispetto all'origine.





Se a<b $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

I punti d'intersezione con l'asse delle ascisse sono (-a;0) e (a;0) dove **a è la lunghezza del semiasse minore.** I punti d'intersezione con l'asse delle ordinate (0;-b) e (0;b) dove b è la lunghezza del semiasse maggiore. I fuochi si trovano sull'asse delle ordinate simmetrici rispetto all'origine.

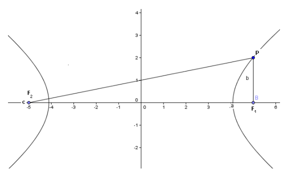
Se gli assi sono uguali (a=b), i fuochi coincidono e l'ellisse risulta essere una circonferenza. La circonferenza è un caso particolare di ellisse.

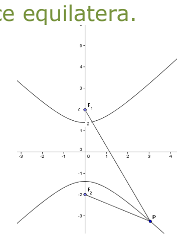
equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

L'iperbole è caratterizzata da due rami che sono compresi tra due rette passanti per l'origine: gli asintoti

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$

Tracciato il rettangolo di lati 2a (base) e 2b (altezza) gli asintoti coincidono con le diagonali.
La curva interseca l'asse delle ascisse e non quello delle ordinate.
I punti d'intersezione con l'asse delle ascisse risultano essere (-a;0) e (a;0)
Se a=b gli asintoti coincidono con le bisettrici dei quadranti e risultano fra loro perpendicolari ; l'iperbole si dice equilatera.





equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$

La curva interseca l'asse delle ordinate e non quello delle ascisse. I punti d'intersezione con l'asse delle ordinate risultano essere (0;b) e (0;-b)

Se ruotiamo la curva di 45° otteniamo XY=costante un'iperbole equilatera i cui asintoti coincidono con gli assi cartesiani.