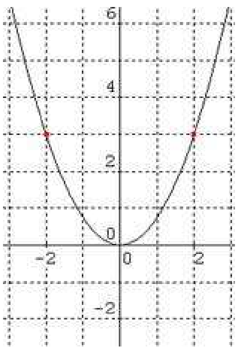
VERIFICA B “coniche e rette”

1. Determina l'equazione della parabola sapendo che il vertice si trova nell'origine e passa per il punto di coordinate (-2,3):



Equazione generale della parabola: $y=ax^2+bx+c$ coordinate vertice

$$V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$$

noto il vertice V(0;0 , possiamo scrivere

1. $-\frac{b}{2a}=0$

   la curva passa per l’origine in quanto il vertice ha coordinate V(0;0) quindi

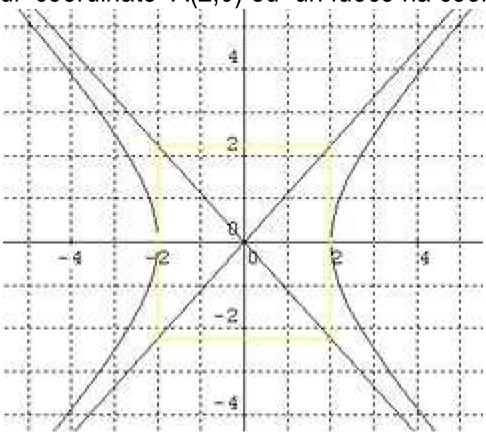
2. c=0

   la parabola passa per il punto P(-2;3), la coppia di numeri è soluzione dell’equazione della parabola (condizione di appartenenza)

3. $3=a(-2)^2+b(-2)+c$

$$\begin{cases}-\frac{b}{2a}=0\\ c=0\\ 4a-2b+c=3\end{cases}\qquad \begin{cases}b=0\\ c=0\\ 4a=3\end{cases}\qquad \begin{cases}b=0\\ c=0\\ a=\frac{3}{4}\end{cases}\qquad y=\frac{3}{4}x^2$$

2. Determina l'equazione dell'iperbole sapendo che incontra l'asse delle ascisse nel punto di coordinate A(2,0) ed un fuoco ha coordinate (-3,0)



Asintoti della curva $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$

Equazione normale dell’iperbole:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Nella formula *a* corrisponde all’ascissa del punto d’intersezione della curva con l’asse delle ascisse, quindi essendo A(2,0) possiamo ricavare il valore di a se a=2, $a^2=4$

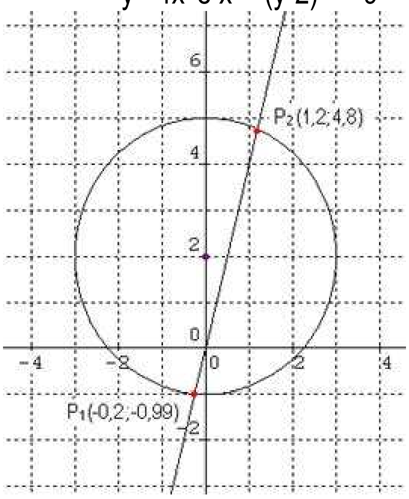
Per ottenere b utilizziamo la relazione che lega a,b e c, dove *c* è l’ascissa del fuoco $b^2=c^2+a^2$

nel nostro caso F(-3,0) quindi c=-3, $c^2=9$, sostituendo $b^2=9-4$; $b^2=5$

equazione iperbole:

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$$

3. Determina i punti d'intersezione tra $y=4x$ e $x^2+(y-2)^2=+9$



$P_1(-0,2;-0,99)$ $P_2(1,2;4,8)$

$x^2+(y-2)^2=9$ equazione circonferenza coordinate centro C(0;2), raggio tre

y=4x retta passante per l’origine, crescente (m=4>0), ordinata all’origine q=2, passante per il punto P(1;4)

Impostiamo il sistema tra l’equazione della retta e della circonferenza:

$$\begin{cases}x^2+(y-2)^2=9\\ y=4x\end{cases}$$

Applicando il metodo di sostituzione otteniamo:

$$x^2+(4x-2)^2-9=0$$
$$x^2+16x^2-16x+4-9=0$$
$$17x^2-16x-5=0$$
$$a=17;b=-16;c=-5$$
$$\Delta=(-16)^2-4(17)(-5)=256+340=596=4\cdot 149$$

$$x_{1,2}=\frac{+16\pm\sqrt{4\cdot 149}}{34}\quad x_{1,2}=\frac{+16\pm 2\sqrt{149}}{34}\quad x_{1,2}=\frac{+8\pm\sqrt{149}}{17}$$

$$x_1=\frac{+8-\sqrt{149}}{17}\cong -0,2\qquad y_1=4\frac{+8-\sqrt{149}}{17}=\frac{+32-4\sqrt{149}}{17}\cong -0,99$$

$$x_2=\frac{+8+\sqrt{149}}{17}\cong 1,2\qquad y_2=4\frac{-8-\sqrt{.49}}{17}=\frac{-32+4\sqrt{149}}{17}\cong 4.8$$

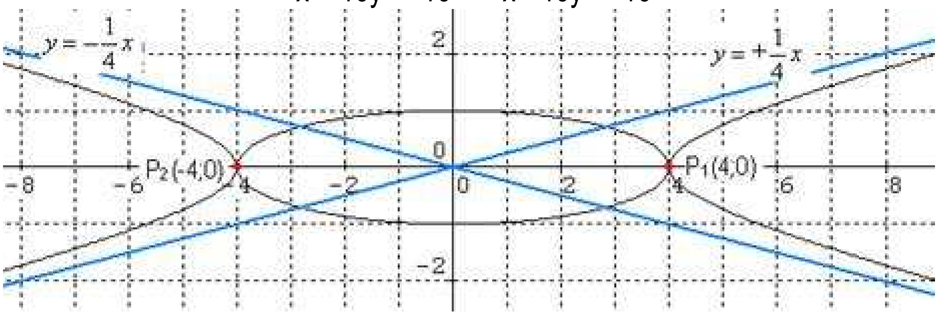
coordinate dei punti d’intersezione

$$P_1\left(\frac{+8-\sqrt{149}}{17};\frac{+32-4\sqrt{149}}{17}\right)\qquad P_2\left(\frac{+8+\sqrt{149}}{17};\frac{+32+4\sqrt{149}}{17}\right)$$

VERIFICA B "coniche e rette"

4. Determina i punti d'intersezione tra le seguenti curve

$x^2 - 16y^2 = 16 \qquad x^2+16y^2 = 16$



Dividendo per sedici entrambe le equazioni otteniamo

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{1}=1 \qquad \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{1}=1$$

equazione iperbole in forma normale ed equazione ellisse in forma normale

per l'iperbole a=4, b=1 asintoti $y=\pm\frac{1}{4}x$

per l'elisse semiasse maggiore a=4, semiasse minore b=1

$$\begin{cases} x^2-16y^2=16 \\ x^2+16y^2=16 \end{cases}$$

Applicando il metodo di riduzione otteniamo:

$2x^2=32$

$x^2=16$

$x=\pm 4$

sostituiamo nella seconda x=4

$4^2+16y^2=16$; $16+16y^2=16$; $+16y^2=0$; $y^2=0$

$y=0$

sostituiamo nella seconda x= -4

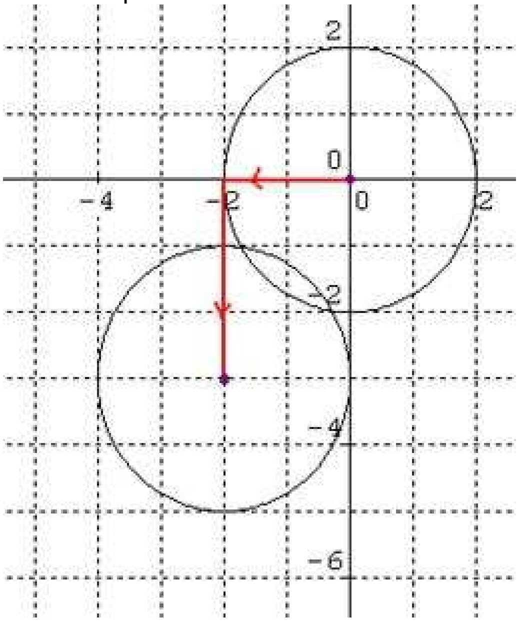
$(-4)^2+16y^2=16$; $16+16y^2=16$; $+16y^2=0$; $y^2=0$

$y=0$

Soluzioni: coordinate punti d'intersezione

$P_1(4;0)$ $P_2(-4;0)$

5. Trasla la curva di equazione $x^2 + y^2 = 4$
di due unità verso sinistra e tre verso il basso. Scrivi l'equazione della nuova curva e le equazioni della trasformazione diretta e della trasformazione inversa



$x^2 + y^2 = 4$

equazione circonferenza con centro nell'origine e raggio 2

$$x^2+y^2+4x+6y+9=0$$

equazione circonferenza centro C(-2;-3)

raggio $r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-c}=\sqrt{4+9-9}=\sqrt{4}=2$

Equazioni delle trasformazioni dirette:

$$\begin{cases} x'=x-2 \\ y'=y-3 \end{cases}$$

Equazioni delle trasformazioni inverse:

$$\begin{cases} x=x'+2 \\ y=y'+3 \end{cases}$$

sostituendo si ottiene

$(x'+2)^2+(y'+3)^2=4$

eliminando l'apice

$x^2+4x+4+y^2+6y+9=4$

$x^2+y^2+4x+6y+9=0$

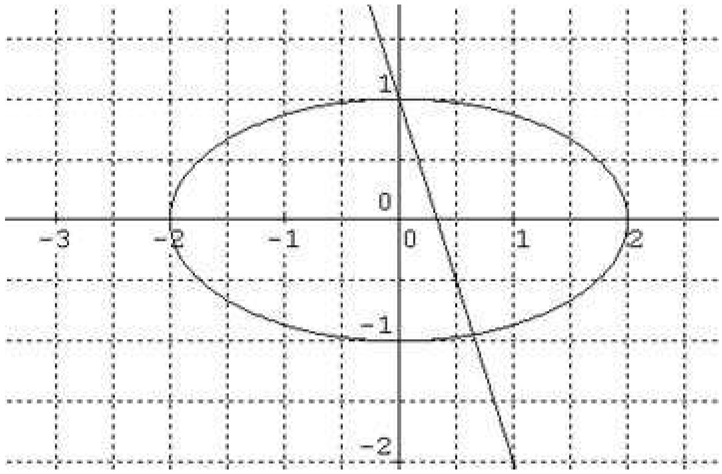
Controllo delle coordinate del centro $C(\alpha;\beta)$

$$\begin{cases} \alpha=-\frac{a}{2} \\ \beta=-\frac{b}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha=-\frac{4}{2} \\ \beta=-\frac{6}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha=-2 \\ \beta=-3 \end{cases}$$

VERIFICA B “coniche e rette”

6. Determina se la retta y=-3x+1 è tangente(T), esterna (E) o secante (S) alla curva $x^2+4y^2=4$



$x^2+4y^2=4$ equazione ellisse a=2 , b=1

y=-3x+1 retta decrescente (m= -3<0), ordinata all’origine q=1 quindi passante per il punto Q(0;1), e per il punto B(-1;4) .

$$\begin{cases} x^2+4y^2=4 \\ y=-3x+1 \end{cases}$$

applicando il metodo di sostituzione

$x^2+4(-3x+1)^2-4=0$

$x^2+4(9x^2-6x+1)-4=0$

$x^2+4(9x^2-6x+1)-4=0$

$x^2+36x^2-24x+4-4=0$

$37x^2-24x=0$

Equazione incompleta:

$x(37x-24)=0$

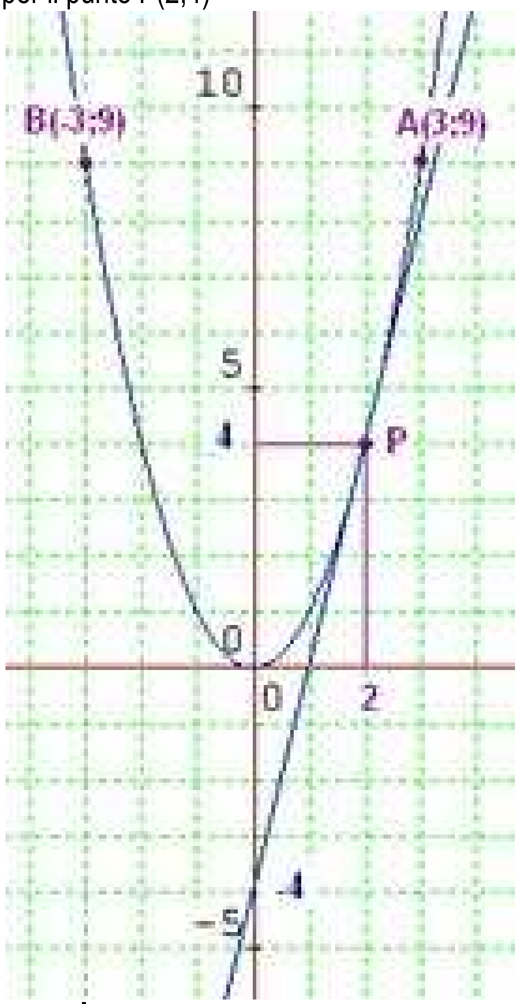
Per la legge dell’annullamento del prodotto otteniamo due soluzioni reali.

$x=0$

$37x-24=0$; $x=\frac{24}{37}$

Quindi il sistema di secondo grado ammette due soluzioni reali distinte, la retta risulta secante.

7. Determina le tangenti alla curva $y=x^2$ passanti per il punto P(2,4)



$y=x^2$

Vertice O(0;0) e asse di simmetria x=2

Passa per A(3;9) e B(-3;9) e per il punto dato P(2,4)

Equazione fascio proprio di rette

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

centro del fascio P(2,4)

$$y-4=m(x-2)$$

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=mx-2m+4 \end{cases}$$

Utilizzando il metodo del confronto otteniamo

$x^2=mx-2m+4$

$x^2-mx+2m-4=0$

$a=1$

$b=-m$

$c=2m-4$

Condizione di tangenza $\Delta=0$

$(-m)^2-4(2m-4)=0$

$m^2-8m+16=0$ ovvero $(m-4)^2=0$; $m-4=0$; $m=4$;

Equazione della tangente alla parabola passante per il punto P(2,4)

$y=4(x-2)+4$; $y=4x-8+4$; $y=4x-4$

VERIFICA B “coniche e rette”

8. Determina le tangenti alla curva $x^2 + 4y^2=4$ parallele alla retta di equazione $y=3x+2$

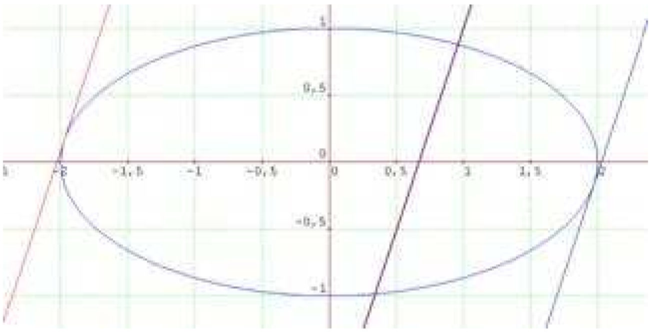
Equazione fascio improprio rette

$$y = mx + q$$

La retta tangente deve essere parallela alla retta di equazione: $y=3x+2$. Quindi per la condizione di parallelismo devono avere lo stesso coefficiente angolare $m=m'$

Il coefficiente angolare della retta data è uguale a tre, $m=3$, quindi possiamo scrivere

$$y = 3x + q$$



$x^2 + 4y^2=4$ dividendo per quattro otteniamo l’equazione dell’ellisse in forma normale

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$$

otteniamo il valore del semiasse maggiore, $a=2$, e di quello minore, $b=1$.

$y=3x+2$ retta non passante per l’origine, crescente ($m=3>0$), ordinata all’origine $q=2$, passante per il punto A(0;2),e per il punto B(1;5)

$$\begin{cases} x^2+4y^2=4 \\ y=3x+q \end{cases}$$

Applicando il metodo di sostituzione otteniamo:

$$x^2+4(3x+q)^2-4=0$$

$$x^2+4(9x^2+6qx+q^2)-4=0$$

$$x^2+36x^2+24qx+4q^2-4=0$$

$$a=37; b=+24q; c=+4q^2-4$$

$$\Delta=(24q)^2-4(37)(4q^2-4)=0$$

$$4\cdot 4\cdot 36q^2-4(37)(4)(q^2-1)=0$$

dividendo per sedici si ottiene

$$36q^2-37q^2+37=0;\ -q^2+37=0;$$

$$q^2-37=0$$

$$q=\pm\sqrt{37}$$

Equazioni delle rette tangenti

$$y=+3x+\sqrt{37}$$

$$y=3x-\sqrt{37}$$