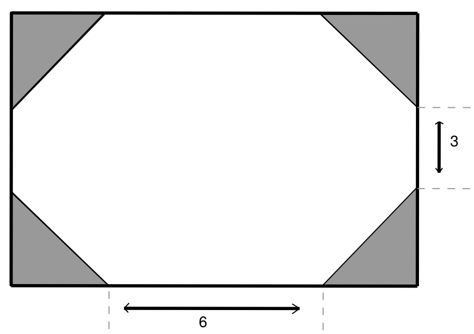
Problemi di secondo grado con argomento geometrico (aree e perimetri)

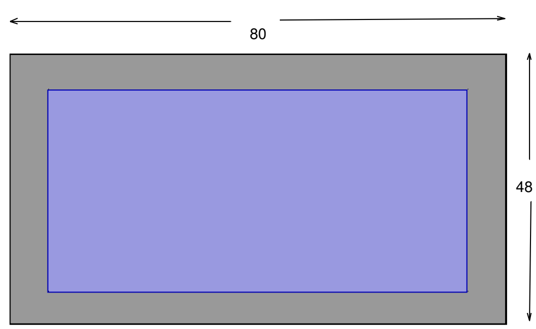
Impostare con una o due incognite

1. Un rettangolo ha perimetro 10 cm ed è tale che l'area gli raddoppia aumentando di 1 cm sia la base che laltezza. Calcola le misure dei lati.

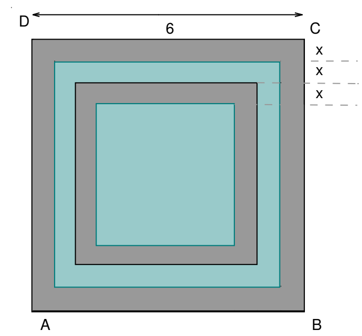
2. Tagliando i quattro angoli dal rettangolo con quattro triangoli isosceli, come mostrato in figura, si ottiene una figura ottagonale di area $62cm^2$. Qual è la misura della superficie che è stata tolta?



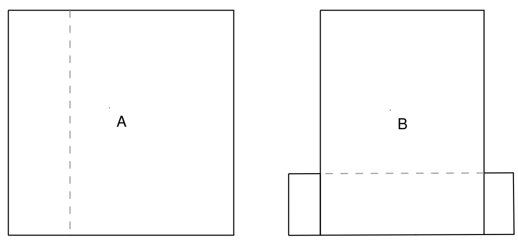
3. Una piazza rettangolare ha i lati di misura 80 m e 48 m ed è circondata da un marciapiede di larghezza costante. Qual è questa larghezza, se la parte non occupata dal marciapiede è i 3/4 dellarea dell'intera piazza ?



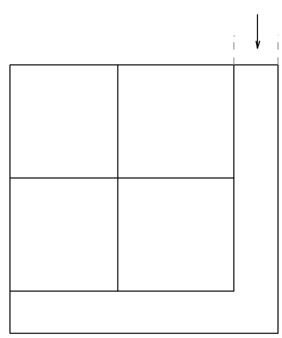
4. ABCD è un quadrato il cui lato misura 6 m. Determina per quali x l'area della parte tratteggiata vale al metà dell'area del quadrato ABCD (La figura tratteggiata è formata da due cornici quadrate concentriche di spessore costante x e di distanza reciproca costante x).



5. Un quadrato A viene suddiviso in due rettangoli che vengono poi sovrapposti a formare la figura B. Sapendo che la figura B ha area 84 cm e perimetro 40 cm, determinare quanto misura il lato del quadrato e quanto misurano i lati dei due rettangoli della suddivisione.

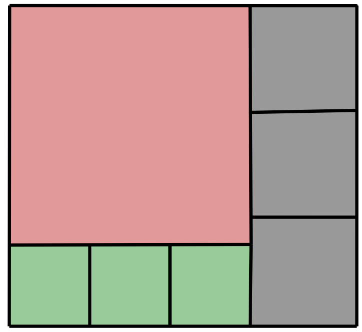


6. Un quadrato di perimetro 16 m è stato suddiviso in cinque regioni tutte della stessa area, quattro delle quali sono quadrati. Qual è, in metri, la lunghezza del lato più corto della rimanente regione (quello che in figura è indicato dalla freccia)?



7. Un quadrato è stato suddiviso in cinque regioni tutte della stessa area, quattro delle quali sono quadrati. Il lato più corto della regione a forma di L misura 4 m in meno del lato di uno dei quadrati. Qual è, in metri, la lunghezza del lato di uno dei quattro quadrati?

8. Un rettangolo di area $156 cm^2$ ed è diviso in 7 quadrati. Trovare le misure dei lati dei quadrati.



Soluzioni

1. Questo problema si può risolvere con un sistema chiamando la base e l'altezza con x e y:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ (x+1)(y+1) = 2xy \end{cases}$$

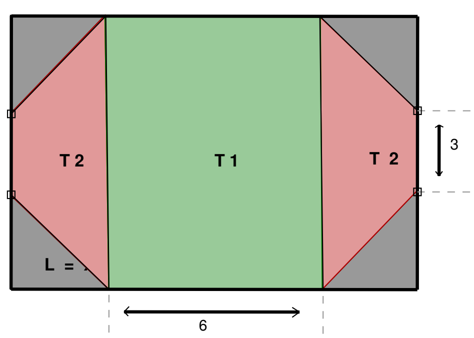
   Nel sistema la prima equazione è data dal perimetro e la seconda dalla relazione tra le aree.
   Le soluzioni del sistema sono **3** e **2**. (Poichè il sistema è simmetrico le soluzioni di x e y naturalmente sono uguali, infatti se la base è 3 l'altezza sarà 2 e se l'altezza sarà 2 la base 3).

2. Questo problema si può risolvere con una equazione di secondo grado chiamando con x il lato del triangolo isoscele.

$$6(2x+3) + 2(x+3)x = 62$$

   Ovvero area del rettangolo con base 6 e altezza (3 + 2x) più l'area dei trapezi laterali, la cui somma delle basi è $2x + 6$ e l'altezza x.

$$T_1 + 2T_2$$



   Delle soluzioni $\{2; -11\}$ solo 2 è accettabile perchè positiva. L'area della superfice tolta è quindi $\frac{x^2}{2} \cdot 4 = 2x^2$ e quindi con x = 2 la superfice che è stata tolta è di **8 cm**^{2}

3. Questo problema si può risolvere con una equazione di secondo grado chiamando con x la larghezza del marciapiede.

$$(80-2x)(48-2x)=\tfrac{3}{4}(80\cdot 48) \qquad\qquad 0\le x\le 24$$

Ovvero area interna uguale ai 3/4 dell'area totale.

$$x^2-64x+240=0$$

Con soluzioni $x=4\vee x=60$, ma poichè x deve essere minore della metà del lato più piccolo (24) la soluzione x = 60 non è accettabile, quindi la larghezza del marciapiede sarà di **4m**.

4. Questo problema si può risolvere con una equazione di secondo grado chiamando con x lo spessore delle cornici (parte grigia).

$$6\cdot 2x+(6-2x)x+(6-2x)2x+(6-3x)2x=36/2 \qquad\qquad \text{con } 0\le x\le 2$$

Ovvero area cornice esterna $(6\cdot 2x+(6-2x)x)$ sommata all'area della cornice interna $((6-2x)2x+(6-3x)2x)$ uguale a metà dell'area di ABCD.

$$-2x^2+7x-3=0$$

Le soluzioni sono $x=\frac{1}{2}\vee x=3$, ma poichè la somma delle 3x degli spessori delle cornici (9) sarebbe maggiore del lato di ABCD (6), la soluzione x = 3 non è accettabile, $x=\frac{1}{2}$ e quindi **50 cm**.

5. Questo problema si può risolvere con un sistema, chiamando con y il lato del quadrato A e con x il lato (minore di y) del rettangolo interno:

$$\begin{cases} y+(y-x)+2y+x=84 \\ (y-x)y+x^2=40 \end{cases} \quad \begin{cases} y=10 \\ y^2-xy+x^2=40 \end{cases} \quad \begin{cases} y=10 \\ x^2-10x+60=0 \end{cases}$$

Le soluzioni di x sono (2,8), quindi **il lato del quadrato misura 10 cm** e **i lati del due rettangoli della suddivisione misurano 2 e 8 cm**

6. Vi sono due modi di risolvere questo problema, con equazione o senza equazione.

   - **Senza equazione** : Poichè il perimetro del quadrato totale è 16 allora il suo lato sarà 4 e quindi la sua area 16. Poichè è suddiviso in 5 parti avente la stessa area allora l'area di ogni parte sarà $\frac{16}{5}$ e quindi il lato di ognuno dei 4 quadrati piccoli sarà $\sqrt{\frac{16}{5}}$. Quindi il lato più corto sarà il lato del quadrato totale meno due volte il lato dei quadrati interni : $4-2\sqrt{\frac{16}{5}}$ **ovvero** $4-8\sqrt{\frac{1}{5}}$
   - **con equazione** : Chiamando con x il lato di ognuno dei quadrati interni e con y il lato più corto.
     $$\begin{cases} 2x+y=4 \\ x^2=(2x+y)y+2xy \end{cases} \quad \begin{cases} y=4-2x \\ 5x^2-16=0 \end{cases}$$
     Le soluzioni sono quindi $x=\pm\sqrt{\frac{16}{5}}$ ma poichè un risultato negativo non è accettabile $x=\sqrt{\frac{16}{5}}$ e $y=4-2\sqrt{\frac{16}{5}}=4-8\sqrt{\frac{1}{5}}$

7. Questo problema si può risolvere con una equazione di secondo grado chiamando con x il lato di ognuno dei quadrati interni.

$$(x-4)(2x+x-4)+(x-4)2x=x^2 \qquad\qquad \text{con } x\ge 4$$

Ovvero l'area della L è uguale all'area di uno dei quadrati interni.

$$x^2 - 6x + 4 = 0$$

Le soluzioni sono $x = 3 \pm \sqrt{5}$ ma solo la soluzione $x = 3 + \sqrt{5}$ è accettabile perchè maggiore di 4.

8. Questo problema si può risolvere con un sistema chiamando con x il lato di ognuno dei quadrati più piccoli verdi e con y il lato dei quadrati più grandi grigi.

$$\begin{cases} (3x)^2 + 3x^2 + 3y^2 = 156 \\ 4x = 3y \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases}$$

Poichè la soluzione di x deve essere positiva $\mathbf{x = 3}$ e $\mathbf{y = 4}$.